**4. INDUZIONE**

È una tecnica che può essere applicata per provare asserzioni generali per insiemi di interi positivi, per sequenze associate ad interi.

|  |
| --- |
| Usata per provare asserzioni con ***dominio******Z+*** della forma: **∀*n P(n)***  Consiste di due passi:   1. ***Base***: La proposizione P(1) è vera; 2. ***Passo di induzione***: fissato un intero positivo n, l’implicazione P(n) 🡪 P(n+1) è vera. (L’assunzione P(n) è chiamata ***ipotesi induttiva***)   Si conclude perciò che ∀n P(n). |
| **Nota**:   * Dalla Base so che P(1) è vera; * Dal Passo di induzione so che P(1) → P(2) è vera (perché P(1) è vera) * Dal Passo di induzione so che P(2) → P(3) è vera (perché P(2) è vera) * …   Quindi P(n) è vera ∀n∈Z+ |

*Esempio*:

Provare che la somma dei primi n interi positivi dispari è n2, cioè 1+3+5+7+….+(2n−1) = n2

In questo caso P(n): 1+3+5+7+….+(2n−1) = n2

***Base***:

Mostrare che P(1) è vera: Banale: 1=12

***Passo Induttivo***:

Mostrare che ***se*** P(n) è vera ***allora*** P(n+1) è vera, per un qualunque fissato n

Supponiamo che P(n) è vera: 1+3+5+7+….+(2n−1) = n2

Mostriamo che P(n+1) è vera: 1+3+5+7+….+(2n−1)+(2n+1) = (n+1)2

n2 +(2n+1) = (n+1)2

**4.1 CORRETTEZZA DELL’INDUZIONE MATEMATICA**

Supponiamo che P(1) è vera, allora P(n) → P(n+1) è vera per tutti gli interi positivi, quindi vogliamo provare che ∀n P(n) è vera.

Per ***contraddizione***, assumiamo che c’è almeno un intero positivo ***m*** tale che ***P(m) è falsa***.

S = insieme di tutti gli interi positivi n per i quali P(n) è falsa.

Così S ≠∅

Proprietà del buon-ordinamento: ogni insieme non vuoto di interi positivi ha almeno un elemento.

S ha almeno un elemento, diciamo k, con k > 1. (Nota che k ≠1 poichè P(1) è vera)

Sia k il più piccolo intero in S tale che P(k) è falsa

Questo implica che k − 1 > 0 e P(k − 1) è vera

Ma P(k − 1) → P(k) è vera, per ipotesi

Siamo arrivati ad una contraddizione 🡪 ∀n P(n) è vera

|  |  |
| --- | --- |
| *Esempio1*:  Proviamo che n < 2n per tutti gli interi positivi n | *Esempio2*:  Proviamo che n3 − n è divisibile per 3, per ogni intero positivo n |

**4.2 INDUZIONE MATEMATICA (GENERALIZZAZIONE)**

Si può usare l’induzione matematica anche quando si vuole provare che ***P(n)*** è vera n = ***b, b+1, b+2, …*** dove ***b è un intero***.

I due passi dell’induzione diventano:

* ***Base***: La proposizione P(b) è vera.
* ***Passo di induzione***: fissato un intero n ≥ b, l’implicazione P(n) → P(n+1) è vera.

Nota che ***b*** può essere negativo, zero o positivo.

|  |  |
| --- | --- |
| *Esempio1*:  Proviamo che n2 < 2n per tutti gli interi n ≥ 5 | *Esempio2*:  Provare per induzione che per gli interi non negativi  1 + 2 + 22 + … + 2n = 2n+1 − 1 |
| *Esempio3*:  Provare per induzione che un insieme con n elementi ha 2n sottoinsiemi | |
| **INDUZIONE FORTE** | **INDUZIONE REGOLARE** |
| 1. Passo base: P(1) 2. Passo di induzione: [P(1) ∧ P(2) ∧ … ∧ P(n)] → P(n+1) | 1. Passo base: P(1) 2. Passo di induzione: P(n) → P(n+1) |

|  |  |
| --- | --- |
| *Esempio1*:  Mostriamo che un intero positivo più grande di 1 è un primo o può essere scritto come il prodotto di primi.  P(n): un intero positivo n > 1 o è primo o può essere scritto come il prodotto di primi. | *Esempio2*:  P(n): con n cerini per ciascuna delle due scatole, il giocatore che gioca per secondo può vincere. |

**4.4 SCHEMA PER LE DIMOSTRAZIONI PER INDUZIONE**

Formula un predicato che descrive il problema in funzione di un intero ***n***: individua ***P(n)***

Esprimi ciò che deve essere provato come ∀n ≥ b, P(n): individuare sempre il ***b*** più adatto al problema

Suddividi la dimostrazione in:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **BASE** | **IPOTESI** | **PASSO DI INDUZIONE** |
| Mostrare che P(b) è vera | Esprimi in modo chiaro:  “Assumiamo che P(n) è vera per un arbitrario n ≥ b“. | Affermare ciò che si deve provare, scrivendo in maniera esplicita che cosa dice P(n+1).  Provare P(n+1) facendo uso dell’ipotesi induttiva P(n). |
| **Nota**: Le dimostrazioni per induzione nascono da situazioni che non riflettono esattamente lo schema dato precedentemente, 2 cose sono sicure:   1. P(n+1) deve essere provata vera, usando il fatto che P(m) è vera per un qualunque insieme di interi m ≤ n; 2. La base deve provare la veridicità di P(.) per il più piccolo (talvolta più di uno) valore consentito ad n. | | |